EWMS, Serie 4

Jamal Drewlo, Daniel Max, Stefan Engelhardt

24. November 2020

Aufgabe 12

(i) Es sei M_i das Ereignis "Das Produkt ist von Maschine i" für $i \in \{1, 2, 3\}$ und sei A "Das Produkt ist Ausschuss". Aus der Aufgabenstellung können wir ablesen, dass

$$\begin{aligned} P(M_1) &= 0.2 & P(M_2) &= 0.2 & P(M_3) &= 0.6 \\ P(A \mid M_1) &= 0.03 & P(A \mid M_2) &= 0.05 & P(A \mid M_3) &= 0.04 \end{aligned}$$

Es sind die M_i paarweise disjunkt und es gilt $P(M_1) + P(M_2) + P(M_3) = 1$. Nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit haben wir

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \mid M_1)P(M_1) + P(A \mid M_2)P(M_2) + P(A \mid M_3)P(M_3) \\ &= 0.03 \cdot 0.2 + 0.05 \cdot 0.2 + 0.04 \cdot 0.6 \\ &= 0.04 \end{aligned}$$

(ii)
ges: $P(M_i \mid A)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Es gilt

$$P(M_i \mid A) = \frac{P(M_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid M_i)P(M_i)}{P(A)}$$

Also

$$\begin{aligned} P(M_1 \mid A) &= \frac{0.03 \cdot 0.2}{0.04} = 0.15 \\ P(M_2 \mid A) &= \frac{0.05 \cdot 0.2}{0.04} = 0.25 \\ P(M_3 \mid A) &= \frac{0.04 \cdot 0.6}{0.04} = 0.6 \end{aligned}$$

(iii)
Sei X_n die Anzahl der gezogenen Ausschussstücke bei Stichprobengröße n. Wir suchen zunächst

$$P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0)$$

Da wir wissen, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Ausschuss $p = 0.04$ ist und annehmen, dass die Qualität der Erzeugnisse unabhängig ist, gilt

$$P(X_n = 0) = (1-p)^n = 0.96^n$$

und damit

$$P(X_n \geq 1) = 1 - 0.96^n$$

Nun müssen wir das kleinste n finden, für das dieser Ausdruck mindestens 0.99 ist, das heißt

$$\begin{aligned} 0.99 \leq 1 - 0.96^n &\iff 0.96^n \leq 0.01 \\ &\iff n \ln(0.96) \leq \ln(0.01) \\ &\overset{\ln(0.96)<0}{\iff} n \geq \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.96)} = 112.8 \end{aligned}$$

Also müssen wir mindestens 113 Erzeugnisse entnehmen.
(iv)
Sei T das Ereignis "Die Prüfung bestimmt das Produkt als Ausschuss". A bleibt wie oben "Das Produkt ist Ausschuss". Wir wissen

$$P(T \mid A) = 0.99 \quad P(T \mid A^C) = 0.03$$

Nach dem Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit gilt.

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \mid A)P(A) + P(T \mid A^C)P(A^C) \\ &= 0.99 \cdot 0.04 + 0.03 \cdot 0.96 \\ &= 0.0684 \end{aligned}$$

Wenn wir 5 Erzeugnisse entnehmen sei Y die Anzahl der für Ausschuss erklärten Stücke. Wir suchen wieder $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$. Auch hier haben wir wieder unter Annahme der Unabhängigkeit

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - P(T^C)^5 = 1 - 0.9316^5 \approx 0.298$$

Aufgabe 13

Beweis. Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ wegen der Unabhängigkeit.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Außerdem gilt

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \supseteq \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i$$

also ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $B_n := \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ eine fallende Folge von Ereignissen. Also gilt nach der Stetigkeit von oben

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \\ &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &\overset{\text{Stet.v.o}}{=} \lim_{n\to\infty} P(B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} P(A_i) \end{aligned}$$

□

Aufgabe 14

Beweis. (i)$\mathbb{Z}$: $\mathbb{R} \in \mathcal{A}_X$
Es gilt

$$X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{A}$$

Daher $\mathbb{R} \in \mathcal{A}_X$.
(ii)$\mathbb{Z}$: $A \in \mathcal{A}_X \implies A^C \in \mathcal{A}_X$

Sei $A \in \mathcal{A}_X$, das heißt $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$X^{-1}(A^C) = \underbrace{X^{-1}(A)}_{\in \mathcal{A}}{}^C \in \mathcal{A}$$

Daher $A^C \in \mathcal{A}_X$.
(iii) $\mathbb{Z}$: $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_X \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_X$
Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_X$, das heißt $X^{-1}(A_i) \in \mathcal{A}$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann haben wir

$$X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{X^{-1}(A_i)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

Damit also $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_X$.
Somit sind alle Eigenschaften einer σ-Algebra gezeigt und der Beweis ist beendet. (Ich gehe davon aus, dass bereits aus Vorkurs oder Grundvorlesungen bekannt ist, dass das Urbild verträglich unter den Mengenoperationen ist) $\square$